

**А. С. Козелков<sup>1</sup>, В. В. Курулин<sup>1</sup>,  
Д. А. Уткин<sup>1</sup>, В. Р. Ефремов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики (Саров, Нижегородская область);*

<sup>2</sup> *АО «КБП им. академика А. Г. Шипунова» (Тула)*

## **УЧЕТ СЖИМАЕМОСТИ СРЕДЫ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ \***

*Аннотация. В докладе рассматриваются вопросы моделирования совместного течения жидких и газовых фаз с учётом сжимаемости. Для решения такого класса задач используют метод VOF, на базе которого в рамках односкоростного приближения сформулирована математическая модель. В данной работе подробно рассмотрен вопрос выбора способов записи основных уравнений с целью увеличения устойчивости и точности результатов. Рассмотрен способ модификации уравнения переноса объемной доли, позволяющий снизить дисбаланс по массовым характеристикам. В работе представлена дискретизация математической модели и итоговая численная схема. Эффективность предложенных решений проверяется на нескольких верификационных задачах: сжатие газа жидкостью в канале, распространение волн сжатия в гомогенной газо-жидкостной среде, заполнение бака жидкостью. По каждой задаче проводится детальное сравнение с имеющимися аналитическими решениями.*

## **MEDIUM COMPRESSIBILITY CALCULATION IN FREE SURFACE PROBLEMS**

*Abstract. The report deals with the modeling of the joint flow of liquid and gas phases with allowance for compressibility. To solve this class of problems, the VOF method is used on the basis of which a mathematical model is formulated within the framework of a one-speed approximation. The paper considers in detail the choice of methods for writing the basic equations in order to increase the stability and accuracy of the results. The work regards a method for modifying the volume fraction transfer equation, which allows to reduce the imbalance in terms of mass characteristics. The paper presents the discretization of the mathematical model and the final numerical scheme. The effectiveness of the proposed solutions is tested on several verification problems: gas compression by liquid in the channel, propagation of compression waves in a homogeneous gas-liquid medium, filling the tank with liquid. For each problem, a detailed comparison is made with the available analytical solutions.*

### **Введение**

Численное моделирование течений со свободной поверхностью является развивающейся областью вычислительной гидродинамики. Совместное течение жидких и газообразных фаз встречается во многих природных и технологиче-

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00267, 17-05-00067 и 16-31-00080).

ских процессах и имеет большое значение в задачах теоретического и прикладного характера. Такими задачами, например, являются процессы перемещения топлива в баках транспортных средств, моделирование процессов затопления морских судов и летательных аппаратов, задачи о распространении и накате морских волн и др.

В настоящее время существует несколько методов для моделирования задач со свободной поверхностью, которые отличаются, в основном, способом определения положения свободной поверхности. Большое практическое применение нашел Эйлеров подход, использующий в качестве маркер-функции показатель объемной доли жидкости и имеющий название метода VOF (Volume of Fluid) [1,2]. Такой подход оказывается достаточно удобным в реализации и использовании, поскольку позволяет рассматривать моделируемую систему жидкость-газ как единую односкоростную среду с переменными физическими свойствами [2]. Также он хорошо обобщается на случай произвольных неструктурированных сеток и произвольного числа фазовых компонент [2]. Основным преимуществом метода VOF является то, что он не накладывает ограничений на интенсивность перемещения фаз и характер геометрии расчётной области.

В литературе много работ посвящено формулировке численного алгоритма для метода VOF, эффективного для расчёта практических задач [3-12]. Все перечисленные работы, так или иначе, связаны с главной особенностью рассматриваемых задач – наличия вблизи свободной поверхности разрыва в поле объемной доли фаз, а, следовательно, и в поле плотности. Так в [2-4] рассматривается вопрос дискретизации конвективных слагаемых, позволяющей получать более точную форму свободной поверхности. Ряд работ [5,6] посвящен корректному учету гравитационных сил с целью избежать нефизичных решений вблизи разрыва поля плотности. В [7] подробно рассмотрен вопрос построения эффективной численной схемы и итерационной процедуры для метода VOF совместно с SIMPLE-подобными алгоритмами. В [8,9] рассматривается проблема выбора схемы аппроксимации конвективных слагаемых уравнения переноса объемной доли для обеспечения резкости межфазной границы. Применению метода VOF для расчета прикладных задач посвящены [3,8,10-12], где рассматриваются как двумерные конфигурации колебания жидкости в бассейнах различной конструкции [10,11], так и сложные геофизические задачи о распространении цунами вдоль участков акваторий Мирового океана [12].

Во всех перечисленных работах газовая и жидкая фазы рассмотрены как несжимаемые, что является оправданным допущением для каждой из задач. Однако существует ряд задач, где учет сжимаемости фаз необходим. При моделировании задач о затоплении тел [13], процессов движения жидкости в газомасляных тормозных устройствах и амортизаторах [14], процессов заполнения и движения топлива в баках летательных аппаратов [15] необходим учет сжимаемости газовой фазы. В задачах о высокоскоростном ударе тел о водную поверхность необходим учет сжимаемости как газовой, так и жидкой фазы [16]. Методу, учитывающему сжимаемость фаз, посвящены работы [17,18]. Так в [17] представлена модель расчёта слабосжимаемого газа на основе метода VOF и допущения об однородности течения, где уравнение неразрывности записано

в упрощенном виде, что налагает ограничение на максимально возможное сжатие. В [18] для учета сжимаемости использовался метод сглаженных частиц с искусственным уравнением состояния для слабосжимаемых течений и введённым ограничителем на давление для снижения численной диссипации. Несмотря на хорошие результаты, показанные на задачах расчёта баротропного течения жидкости, в работе отмечается, что метод может применяться только для моделирования течений с небольшим коэффициентом сжатия.

В настоящем докладе рассматривается алгоритм учёта сжимаемости фаз при моделировании двухфазных течений методом VOF, впервые представленном в [19]. Учет сжимаемости фаз требует записи уравнения переноса объёмной доли в дивергентном виде [20]. Использование дивергентного представления требует высокой точности в вычислении объёмных потоков, что, в свою очередь, накладывает ограничения на шаг по времени и требует большего числа итераций. В настоящей работе описан способ модификации уравнения переноса объёмной доли для его записи в недивергентном виде, позволяющем улучшить свойства вычислительной процедуры. Эффективность предложенного способа проверяется на задачах о двухфазном течении в плоском канале, распространении возмущений в гомогенной среде, а также на задаче о заполнении цилиндрического бака жидкой фазой.

## 1. Математическая модель

Будем рассматривать задачу о движении среды, состоящей из произвольного числа фазовых компонент. Для формулировки математической модели примем некоторый ряд упрощающих допущений, а именно: все фазы описываются одним общим полем скорости и давления; течение изотермическое; фазовые переходы отсутствуют.

Учитывая данные допущения, запишем систему основных уравнений, включающую в себя уравнение неразрывности, уравнение сохранения импульса, уравнение переноса объёмной доли и уравнение состояния фазы [20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i \\ \frac{\partial \rho_\xi \alpha_\xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \rho_\xi \alpha_\xi) = 0 \\ \rho_\xi = \rho_\xi(p) \end{array} \right. , \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $u_i$  – вектор скорости,  $x_i$  – пространственный вектор,  $p$  – давление,  $\tau_{ij}$  – тензор вязких напряжений,  $g_i$  – вектор ускорения свободного падения,  $\xi$  – индекс, указывающий номер фазы,  $\alpha_\xi$  – объёмная доля фазы,  $\rho$  – результирующая плотность, представляющая собой усреднённое значение плотности по всем фазам:

$$\rho = \sum_{\xi} \rho_{\xi} \alpha_{\xi}$$

Для построения устойчивого алгоритма учёта сжимаемости фаз при моделировании многофазных течений методом VOF преобразуем уравнения системы (1). Уравнение неразрывности запишем относительно дивергенции скорости:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = - \sum_{\xi} \left( \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \frac{d\rho_{\xi}}{dt} \right) = - \sum_{\xi} \left( \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial t} + \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \left[ \frac{\partial \rho_{\xi} u_i}{\partial x_i} - \rho_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \right). \quad (2)$$

Это позволяет избавиться от производной  $\frac{d\rho}{dt}$ , принимающей большие значения на участках свободной поверхности, что повышает устойчивость итерационной процедуры поиска решения. Уравнение сохранения импульса записано в недивергентном виде, поскольку такая запись, как показано в [8], компенсирует ошибки аппроксимации, связанные с неточным выполнением условия баланса массы в ячейке, что повышает точность формы свободной поверхности:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j \rho) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i. \quad (2.5)$$

Уравнение переноса объёмной доли для удобства численной дискретизации запишем относительно величины  $\alpha_{\xi}$ :

$$\frac{\partial \alpha_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \alpha_{\xi}) = - \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \left( \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

Запись данного уравнения в недивергентном виде, по подобию уравнения сохранения импульса, также приводит к увеличению устойчивости и точности решения [7,8], однако для сжимаемых течений представить его в таком виде напрямую нельзя. Такое представление возможно следующим образом. Вычтем из обеих частей уравнения (3) член  $\alpha_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ :

$$\frac{\partial \alpha_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \alpha_{\xi}) - \alpha_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = - \alpha_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \left( \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Дивергенция скорости в правой части уравнения (4) вычисляется напрямую из уравнения неразрывности. Фактически данное преобразование означает, что независимо от точности вычисления поля скорости  $u_i$ , уравнение переноса объёмной доли будет решаться с учётом значения дивергенции скорости, согласованной с уравнением сохранения массы. Таким образом, конвективные члены в уравнении (4) записаны в недивергентном виде. Далее будет показано, что использование уравнения переноса объёмной доли в записи (4) для математической модели даёт более точные результаты, чем при использовании уравнения в записи (3).

Окончательно система уравнений (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = - \sum_{\xi} \left( \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \frac{d\rho_{\xi}}{dt} \right) \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j \rho) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i \\ \frac{\partial \alpha_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \alpha_{\xi}) - \alpha_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \alpha_{\xi} \sum_{\xi} \left( \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial t} - \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \left[ \frac{\partial \rho_{\xi} u_i}{\partial x_i} - \rho_{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \right) - \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \left( \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_{\xi}}{\partial x_i} \right) \\ \rho_{\xi} = \rho_{\xi}(p) \end{cases} \quad (6)$$

Необходимо отметить, что система (6) не накладывает ограничений на используемые уравнения состояния для каждой фазы. Далее сформулируем численную схему для её решения.

## 2. Численная схема

Для аппроксимации уравнений системы (6) применим конечно-объемный метод [21], для описания которого уравнения системы удобно представить в виде уравнения переноса скалярной величины  $\varphi$  [21,22]:

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \varphi u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}, \quad (7)$$

Для аппроксимации производной по времени в уравнении (7) используется трёхслойная схема второго порядка [22]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{3\varphi_i^{n+1} - 4\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}}{2\Delta t} V_i,$$

где верхний индекс  $n$  указывает на номер шага по времени,  $i$  – номер ячейки,  $V_i$  – объём ячейки.

Для дискретизации производных по пространству в (7) производные интегрируют по объёму ячейки  $i$ , после чего они представляются как сумма потоков:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \varphi) = \oint_{S_i} \rho u_j \varphi dS_j \approx \sum_k \rho_k u_{j,k} S_{j,k} = \sum_k \rho_k F_k,$$

где  $F_k$  – объёмный поток через грань  $k$  ячейки  $i$ . Значение величины  $\rho_k$  определяется используемой численной схемой. Для скорости в работе используется противопоточная схема UD [21]. В уравнении переноса объёмной доли для предотвращения размытия фронта раздела фаз используется антидиффузионная схема HRIC [22].

Диффузионное слагаемое уравнения (7), при условии, что выражение тензора вязких напряжений записано для вязкой неньютоновской жидкости, принимает вид [20]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

Для него используется подход «релаксация сверхху» (over-relaxed approach) [22], который даёт хороший результат на неортогональных сетках. Диффузионный член в результате дискретизации примет вид:

$$\sum_k (\mu_m u_m S_k^*) - \sum_k (\mu_i u_i S_k^*) + \sum_k (\mu_k \langle \nabla u \rangle_k S_{k,i}^a) + \sum_k \left( \mu_i \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j \right)_k S_k \right) + \frac{2}{3} \sum_k \left( \mu_i \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_j \right)_k \delta_{ij} S_k \right),$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость,  $S_k^* = \frac{S_{k,i} S_{k,i}}{d_{k,j} S_{k,j}}$ ,  $d_{k,j}$  – расстояние от центра ячейки

до грани  $k$ ,  $S_{k,i}^a = S_{k,i} - S_k^*$ .

Использование представленной дискретизации заменяет уравнение (7) системой линейных алгебраических уравнений, записанных для каждой расчётной ячейки:

$$A_i \varphi_i + \sum_{k_{\text{int}}} A_{m,k_{\text{int}}} \varphi_{m,k_{\text{int}}} = R_i,$$

где  $A_i$  – диагональный коэффициент уравнения,  $k_{\text{int}}$  – внутренние грани ячейки,  $A_{m,k_{\text{int}}}$  – внедиагональные коэффициенты,  $R_i$  – компонент вектора правой части.

Для численного решения системы (6) может использоваться любой SIMPLE-подобный алгоритм [2,7,23]. В настоящей работе опирались на алгоритм, основанный на методе PISO [7]. Алгоритм PISO состоит из этапа предиктора и корректора. На этапе предиктора для получения первого приближения нового поля скорости вначале составляется дискретный аналог уравнения сохранения импульса относительно скорости без разложения члена градиента давления. Для ячейки  $i$  уравнение выглядит так:

$$A_i u_i + \sum_{k_{\text{int}}} A_{m,k_{\text{int}}} u_{m,k_{\text{int}}} = R_i^j - \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_i V_i + g_i \sum_{\xi=1}^N \rho_{\xi,i} \alpha_{\xi,i}, \quad (8)$$

где  $u_i$  – компонента скорости в ячейке  $i$ .

Для этапа корректора из уравнения (8) нужно получить выражение скорости в ячейке  $i$ :

$$u_i = \frac{1}{A_i} \left( R_i - \sum_{k_{\text{int}}} A_{m,k_{\text{int}}} u_{m,k_{\text{int}}} \right) - \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_i V_i = H_i - \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_i V_i,$$

которое нужно подставить в уравнение неразрывности (2):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( H_i - \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_i V_i \right) = - \sum_{\xi} \left( \frac{\alpha_{\xi}}{\rho_{\xi}} \frac{d \rho_{\xi}}{dt} \right). \quad (9)$$

Данное уравнение также необходимо дискретизировать относительно давления, тогда, по аналогии с выражением (8), можно будет записать уравнение (9) для ячейки  $i$ :

$$B_i p_i^{n+1} + \sum_{k_{\text{int}}} B_{m,k_{\text{int}}} p_{m,k_{\text{int}}}^{n+1} = M_i, \quad (10)$$

где  $B_i$  – диагональный коэффициент уравнения,  $B_{m,k_{\text{int}}}$  – внедиагональные коэффициенты,  $M_i$  – компонент вектора правой части.

Решение уравнения (10) даёт поле давления, которое используется для пересчёта полей массовых потоков по формуле:

$$F_k = \left( H_{i,k} - \frac{V_{i,k}}{A_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_k \right) S_{i,k}.$$

Далее процедура предиктор-корректор повторяется с обновлёнными полями скоростей, давления и объёмных потоков до достижения требуемой точности.

Описанная физико-математическая модель реализована в пакете программ ЛОГОС – отечественном программном продукте инженерного анализа, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного тепло-массопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [24-27]. При вычислениях используется многосеточный метод [25,28], позволяющий существенно ускорить вычислительную процедуру и эффективно использовать сотни вычислительных ядер [24,28].

### 3. Численные эксперименты

Для верификации реализованной модели проводилось тестирование на ряде задач, имеющих аналитическое решение. В данной статье приведены три таких задачи, в которых главным объектом исследования является совместное течение газовой фазы с переменной плотностью и жидкой фазы с постоянной плотностью. Во всех задачах были задействованы жидкость и газ с одними и теми же параметрами, их характеристики представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры фаз		
Параметры веществ	Жидкая фаза (вода)	Газовая фаза (воздух)
Плотность, $кг/м^3$	998	1.1656
Молекулярная вязкость, $кг/(м \cdot с)$	0.00101	1.85e-05
Молекулярный вес, $кг/моль$	18.015	0.028694

#### 3.1. Задача о сжатии газа несжимаемой жидкостью

В задаче рассматривается сжатие газа жидкостью в плоском одномерном канале длиной  $l=10 м$ . В задаче оценивается плотность газа, а также общая масса газа, которые сравниваются с точным решением. На рисунке 3.1 схематично изображена геометрия, граничные и начальные условия.

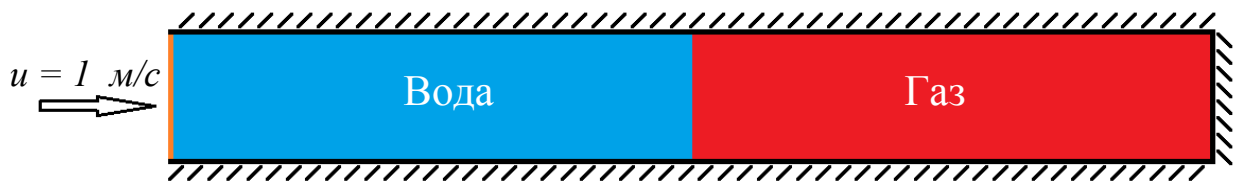


Рис. 1. Постановка задачи 1

Через левую границу в область равномерно поступает вода с заданной скоростью  $u=1 м/с$ . На остальные границы наложено условие непротекания. В начальный момент времени расчётная область условно поделена на два одинаковых региона: первая половина заполнена жидкой фазой – водой, другая заполнена газовой фазой.

Аналитическая зависимость плотности газа от времени для задачи была получена исходя из закона сохранения массы газа в канале:

$$m = \rho(t) \cdot V(t) = m_0 = \rho_0 \cdot V_0 \Rightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0 V_0}{V(t)} = \rho_0 \frac{l_0}{(l_0 - u \cdot t)},$$

где  $\rho(t)$  и  $V(t)$  – мгновенная плотность и объём газа,  $\rho_0$  и  $V_0 = l_0$  – начальная плотность и первоначальный объём газа.

Задача решалась с использованием двух видов уравнений переноса объемной доли – уравнения (3) и уравнения (4), обозначим данные варианты как «Модель А» и «Модель Б» соответственно. Расчёты проводились с варьированием чисел Куранта (CFL) путем выбора величины расчётного шага по времени. На рисунке 3.3 представлены графики изменения плотности от времени для различных вариантов расчета:

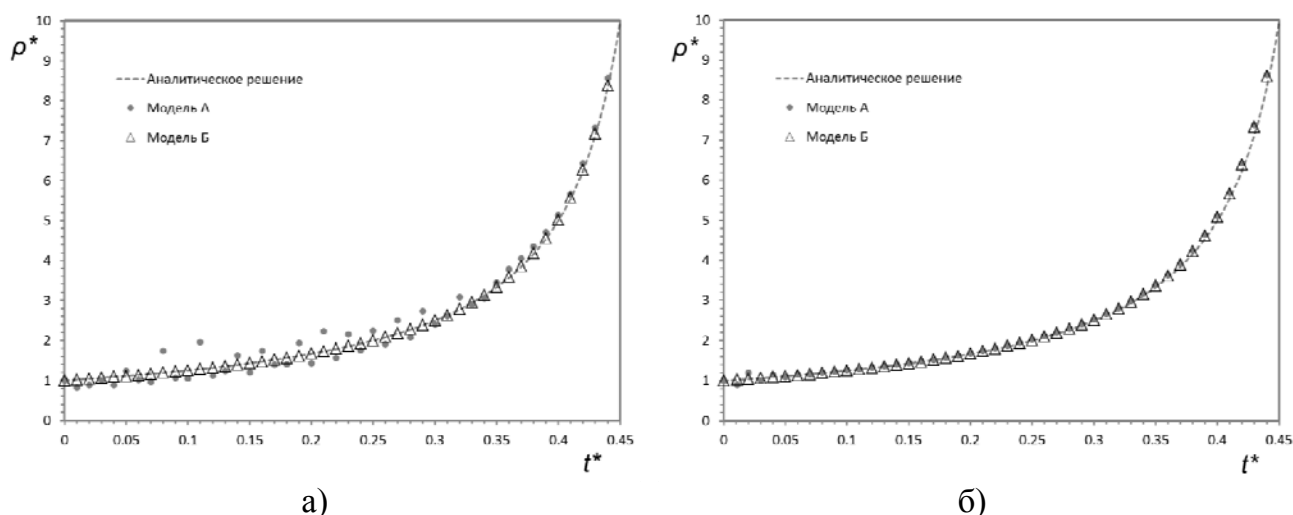


Рис. 3.3 – а) зависимость плотности от времени для расчётов при  $CFL = 0.2$ ;  
 б) зависимость плотности от времени для расчётов при  $CFL = 1$   
 (здесь безразмерные величины  $\rho^* = \rho/\rho_0$ ;  $t^* = t \cdot u/l$ )

По графику видно, что модель Б дает более точный результат по плотности газа. В случае расчета с  $CFL = 0.2$  для модели Б отсутствуют осцилляции в зависимости плотности газа от времени, в отличие от модели А. Сравним итоговый дисбаланс массы газа (разница между начальной массой газа и конечной, отнесенной к начальной массе газа) для обеих моделей (таблица 2).

Таблица 2

**Дисбаланс массы газа на конец расчёта**

	$CFL = 0.2$	$CFL = 0.5$	$CFL = 1$	$CFL = 1.5$
Модель А	2.5 %	1.9 %	2.4 %	3.1 %
Модель Б	0.4 %	0.9 %	1.9 %	2.8 %

По данным в таблице видно, что результаты, полученные по модели Б, за счёт использования недивергентной формы уравнения и учета «физической» дивергенции скорости дают дисбаланс массы газа меньший в 1.2–6 раз, чем у модели А. С увеличением шага по времени разница в дисбалансах уменьшается, однако модель Б всегда показывает лучший результат.

### 3.2. Задача о распространении малых возмущений в двухфазной смеси

В задаче моделируется процесс распространения малых возмущений в жидкости с ненулевым газосодержанием. Это типичный пример задачи по оценке опасности возникновения кавитационных процессов. Рассматривается одномерный канал длиной  $l = 1$  м. В расчете измеряется скорость звука, которая сравнивается с аналитическим решением. На рисунке 3.4 схематично изображена геометрия, граничные и начальные условия задачи.

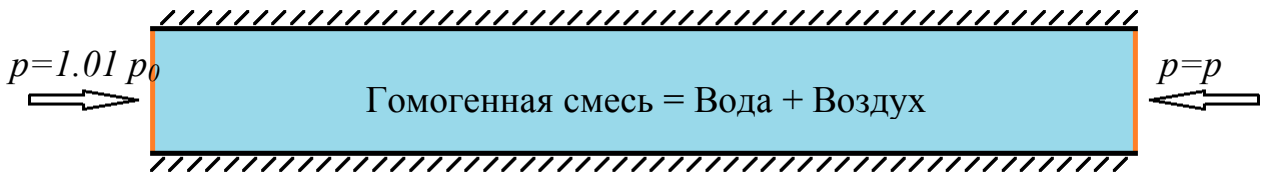


Рис. 3.4. Постановка задачи 2

На левой и правой границах задано граничное условие фиксированного статического давления. На остальных границах задано условия непротекания. Канал полностью заполнен однородной смесью, состоящей на 99% из воды и на 1% из воздуха. Давление в начальный момент времени составляет  $p_0 = 1 \text{ атм}$ . На правом конце задано давление  $p_0$ , на левом  $-1.01 \cdot p_0$ . В начале расчёта на левой границе образуется волна сжатия, которая движется в сторону меньшего давления со скоростью звука  $c_{зв}$ . Скорость звука для данной смеси можно оценить аналитически с использованием обобщения формулы Мэллока [29]:

$$c_{зв} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho \alpha_{газ}}} = 101.27 \text{ м/с},$$

где  $\kappa = 1$  – коэффициент политропы,  $p$  – давление (Па),  $\rho$  – плотность смеси ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\alpha_{газ}$  – объёмная доля газа в смеси.

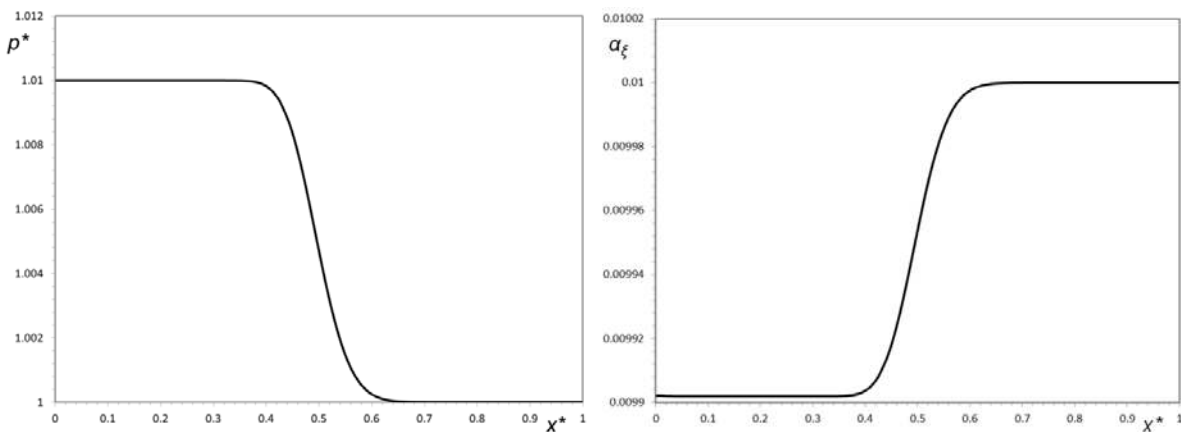


Рис. 3.5. Профили величин в канале на момент  $t = 0.0049 \text{ с}$ : а) профиль волны сжатия; б) профиль объёмной доли газа (здесь безразмерные величины  $p^* = p/p_0$ ;  $x^* = x/l$ ,  $x$  – координата по оси, отложенной от начала канала и вдоль его длины)

По результатам расчёта по модели Б при  $CFL = 1$  скорость распространения малых возмущений составила  $101.41 \text{ м/с}$ , что отличается от аналитического значения на 0.14%. Результаты расчёта по модели А дали результат, равный  $101.42 \text{ м/с}$ , отличающийся от аналитического значения на 0.15%. Обе модели дают результат, близкий к аналитическому. Такое слабое различие обусловлено тем, что переносимое давление относительно мало, и сжатие газа в смеси (следовательно, и дивергенция скорости) сравнительно невелико.

### 3.3. Задача о заполнении цилиндрического бака жидкостью

В задаче рассматривается процесс заполнения цилиндрического бака жидкостью, сопровождаемый сжатием находящегося в нём газа. В задаче контролируется масса газа, а также давление, которые сравниваются с аналитическим решением. Задача демонстрирует эффективность разработанной модели на трёхмерных неструктурированных сетках. На рисунке 3.6 схематично изображена геометрия и условия задачи.

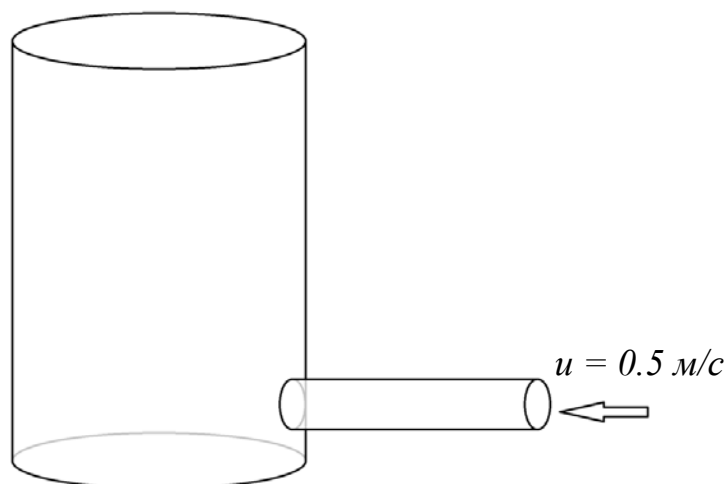


Рис. 3.6. Постановка задачи 2

По трубковидному каналу длиной  $0.7 \text{ м}$  и диаметром  $0.08 \text{ м}$  со скоростью  $0.5 \text{ м/с}$  равномерно поступает вода, которая втекает в бак цилиндрической формы диаметра  $0.6 \text{ м}$  и высотой  $1 \text{ м}$ . На остальные границы расчётной области наложено граничное условие непротекания. В начальный момент времени бак полностью заполнен газом, который на протяжении всего процесса не покидает расчётную область.

Аналитический график зависимости давления от времени может быть получен аналитически из уравнения Менделеева-Клапейрона при постоянной массе газа:

$$p(t) = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V(t)} = \frac{\rho_0 \cdot V_0 \cdot R \cdot T}{M \cdot (V_0 - F \cdot t)},$$

где  $m = \rho_0 \cdot V_0$  – масса газа,  $\rho_0$  и  $V_0$  – соответственно плотность газа и объём, занимаемый им в начальный момент времени,  $M$  – молекулярный вес,  $R = 8.31446 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{к)}$  – универсальная газовая постоянная,  $F$  – величина объёмного потока, втекающего в бак.

На рисунке 3.8 представлен график зависимости давления газа от времени.

По графику на рисунке 3.8 видно, что результаты, полученные после расчёта по обеим моделям, хорошо согласуются с аналитическими данными – обе модели достаточно точно предсказали давление газа в данной аналитической задаче. Среднее отклонение от точного решения составляет  $0.5\%$ . В таблице 3 представлены результаты по массовому дисбалансу газа.

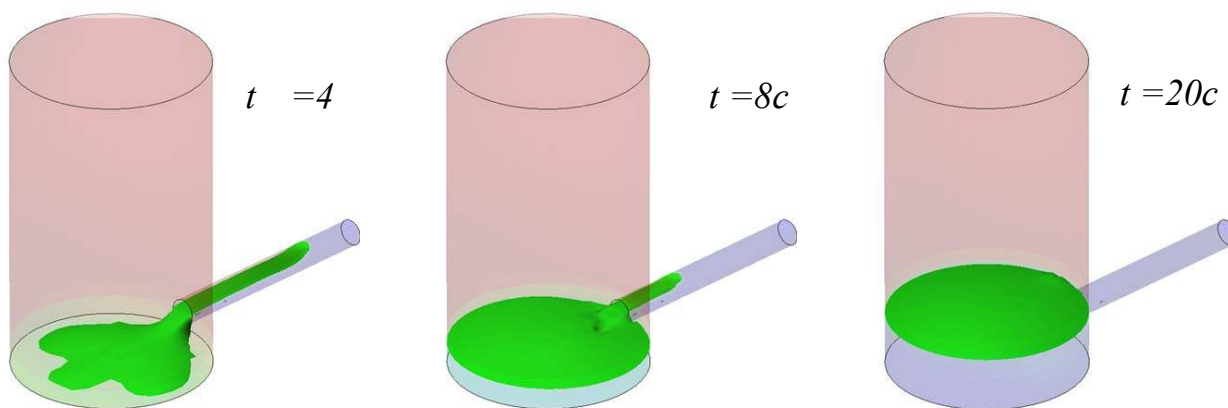


Рис. 3.7. Изоповерхность объёмной доли воды по уровню  $\alpha = 0.5$  на различные моменты времени  $t$

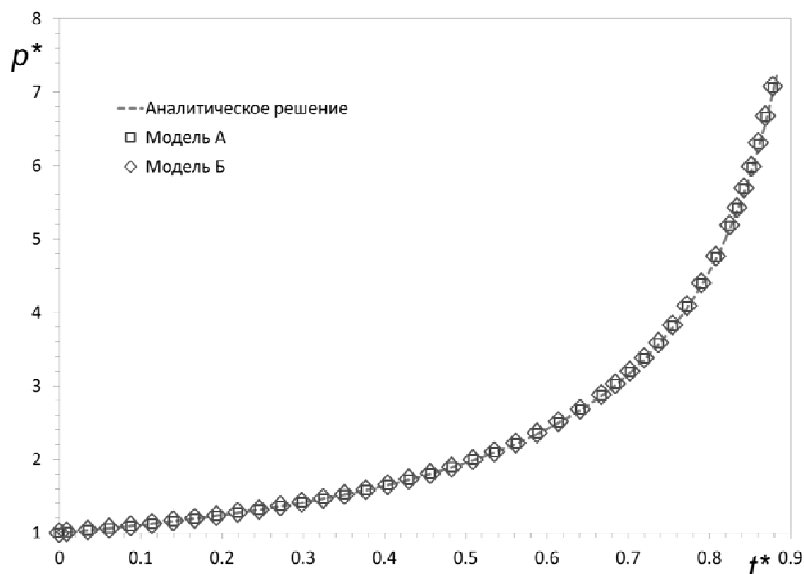


Рис. 3.8. Сравнение аналитического и полученного в результате расчёта графиков изменения давления (здесь безразмерные величины  $p^* = p/p_0$ ;  $t^* = t \cdot u \cdot S_{\text{выход}} / V_{\text{тела}}$ )

Таблица 3

**Дисбаланс массы газа на конец расчёта**

	Аналитическое решение	Модель А	Модель Б
Масса газа, кг	0.3319051	0.3317241	0.3317958
Относительный дисбаланс, %	—	0.05	0.03

По таблице видно, что по модели Б для данной задачи получен дисбаланс массы газа в 1.5 раза меньший, чем по модели А.

## Заключение

В докладе рассмотрены некоторые особенности моделирования течений жидких и газовых фаз с использованием метода VOF. Подробно рассмотрен вопрос выбора способов записи основных уравнений с целью увеличения устойчивости и точности результатов. Для уравнения переноса объёмной доли рассмотрен способ модификации, основанный на записи уравнения в недивергентном виде. Его эффективность проверена на нескольких задачах: сжатие газа жидкостью в канале, распространение волн сжатия в гомогенной газо-жидкостной смеси, заполнение бака жидкостью. Показано, что предложенный метод позволяет в несколько раз снизить погрешность по массовым характеристикам.

## Литература

1. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.* – 1981. – Vol. 39. – P. 201–225.
2. Ubbink O. Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces // PhD thesis, Imperial College, University of London, 1997.
3. Albadawi A., Donoghue D. B., Robinson A. J., Murray D. B., Delauré Y. M. C. On the assessment of a VOF based compressive interface capturing scheme for the analysis of bubble impact on and bounce from a flat horizontal surface // *International Journal of Multiphase Flow* 65 (2014) 82–97
4. Sun X., Sakai M. Numerical simulation of two-phase flows in complex geometries by using the volume-of-fluid/immersed-boundary method // *Chemical Engineering Science* 139 (2016). – P. 221–240
5. Figueiredo R. A., Oishi C. M., Afonso A. M., Tasso I. V. M., Cuminato J. A. A two-phase solver for complex fluids: Studies of the Weissenberg effect // *International Journal of Multiphase Flow* 84 (2016). – P. 98–115
6. Aniszewski W., Ménard T., Marek M. Volume of Fluid (VOF) type advection methods in two-phase flow: A comparative study // *Computers & Fluids* 97 (2014). – P. 52–73.
7. Яцевич С. В., Курулин В. В., Рубцова Д. П. О применении алгоритма PISO в задачах динамики молекулярно-несмешивающихся жидкостей // *ВАНТ, сер. математическое моделирование физических процессов.* – 2015. – № 1. – С. 16–29. [In Russian].
8. Khrabry A. I., Smirnov E. M., Zaytsev D. K. Solving the Convective Transport Equation with Several High-Resolution Finite Volume Schemes: Test Computations // *Computational Fluid Dynamics 2010.* – New-York: Springer, 2011. – 954 p. – P. 535–540.
9. Denner F., Berend G. M. Compressive VOF method with skewness correction to capture sharp interfaces on arbitrary meshes // *Journal of Computational Physics* 279 (2014). – P. 127–144.
10. Wemmenhove R., Luppens R., Veldman A., Bunnik T. Numerical simulation of hydrodynamic wave loading by a compressible two-phase flow method // *Computers & Fluids* 114 (2015). – P. 218–231.

11. Singala V., Bajaj J., Awalgaonkar N., Tibdewal S. CFD Analysis of a Kerosene Fuel Tank to Reduce Liquid Sloshing // *Procedia Engineering* 69 (2014). – P. 1365–1371.
12. Kozelkov A. S., Kurkin A. A., Pelinovsky E. N., Tyatyushkina E. S., Kurulin V. V., Tarasova N. V. Landslide-type tsunami modelling based on the Navier-Stokes Equations // *Science of tsunami Hazards, Journal of Tsunami Society International*. – 2016. – Vol. 35. – № 3. – P. 106–144.
13. A-man Zhang, Xue-yan Cao, Fu-ren Ming, Zhi-Fan Zhang Investigation on a damaged ship model sinking into water based on three dimensional SPH method // *Applied Ocean Research* 42 (2013). – P. 24–31.
14. Жуков И. И., Башкатов В. А. и др., Артиллерийское вооружение. Основы устройства и конструирование // М.: Машиностроение, 1975. – 420 с. [In Russian].
15. Cai Yan, Bu Xueqin, Lin Guiping, Sun Bing, Zeng Yu, Li Zixuan Experimental study of an aircraft fuel tank inerting system // *Chinese Journal of Aeronautics*, (2015), 28(2). – P. 394–402.
16. Shuvalov V. V., Trubestkaya I. A. Numerical modeling of marine target impacts // *Solar System Research*. – Vol. 36. – № 5 (2002). – P. 417–430.
17. Heyns J., Malan A., Harms T., Oxtoby O. A weakly compressible free-surface flow solver for liquid–gas systems using the volume-of-fluid approach // *Journal of Computational Physics* 240 (2013). – P. 145–157.
18. Zhang C., Hu X. Y., Adams N. A. A weakly compressible SPH method based on a low-dissipation Riemann solver // *Journal of Computational Physics* 335 (2017). – P. 605–620.
19. Яцевич С. В. Моделирование резонансного инициирования кавитации в гидросистемах, далеких от метастабильного состояния // Сборник трудов «IX Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам фундаментальной и прикладной механики», г. Казань.– 2015. – С. 4348–4350.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – Изд. 4-е, стереотипное. – М.: Наука, 1988. – Т. VI. Гидродинамика. – 736 с. [In Russian].
21. Ferziger J. M., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. – Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2002. – 423 p.
22. Jasak H. Error Analysis and Estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Thesis submitted for the degree of doctor // Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996.
23. Козелков А. С., Мелешкина Д. П., Куркин А. А., Тарасова Н. В., Лашкин С. В., Курулин В. В. Полностью неявный метод решения уравнений Навье-Стокса для расчета многофазных течений со свободной поверхностью // *Вычислительные технологии*. – 2016. – Т. 21. – № 5. – С. 54–76.
24. Kozelkov A. S., Kurulin V. V., Lashkin S. V., Shagaliev R. M., and Yalozo A. V., Investigation of Supercomputer Capabilities for the Scalable Numerical Simulation of Computational Fluid Dynamics Problems in Industrial Applications // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016. – V. 56. – № 8. – P. 1506–1516.
25. Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С., Пучкова О. Л., Лашкин С. В. Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использо-

ванием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС, журнал ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов, 2013. – Вып. 4. – С. 44–56.

26. Козелков А. С., Курулин В. В., Пучкова О. Л., Тятюшкина Е. С. Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей // Математическое моделирование, 2014. – Т. 26. – № 8. – С. 81–96.

27. Козелков А. С., Куркин А. А., Крутякова О. Л., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. Зонный RANS–LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2015. – № 5. – С. 24–33.

28. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В., Силаев Д. П., Симонов П. Г. Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // ВАНТ. Сер. «Математическое моделирование физических процессов». – 2013. – Вып. 4.

29. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах // Новосибирск: Наука, 1984. [In Russian].