

УДК 519.634

МЕТОД УЧЕТА СИЛ ГРАВИТАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ¹⁾

© 2017 г. В. Р. Ефремов¹, А. С. Козелков², А. В. Корнев³, А. А. Куркин²,
В. В. Курулин⁴, Д. Ю. Стрелец³, Н. В. Тарасова⁴

¹⁾ 300001 Тула, ул. Щегловская засека, 59, АО Конструкторское бюро приборостроения
им. акад. А.Г. Шипунова;

²⁾ 603950 Нижний Новгород, ул. Минина, 24, ФГБОУ ВО Нижегородский гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева;

³⁾ 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4, ФГБОУ ВО МАИ;

⁴⁾ 607189 Саров, пр-т Мира, 37, ФГУП Российский Федеральный Ядерный Центр Всероссийский
научно-исследовательский ин-т экспериментальной физики)

e-mail: valentin_e@mail.ru, askozelkov@mail.ru, avkornev@mail.ru, aakurkin@gmail.com, kurulin@mail.ru,
dimstrelets@rambler.ru, tara@vniief.ru

Поступила в редакцию 13.02.2017 г.

Рассматривается проблема построения численного алгоритма, обеспечивающего корректный учет силы гравитации при наличии разрывов в плотности среды в случае использования неструктурированных расчетных сеток с коллокированным размещением неизвестных величин и алгоритмов расщепления, основанных на методах типа SIMPLE. Для получения корректного поля гидростатического давления предложено явное выделение вклада силы гравитации в уравнении для давления и его вычисления с использованием решения задачи о гравитационном равновесии двухфазной среды. Для обеспечения равновесия силы гравитации и градиента давления в случае покоя среды предложен алгоритм, основанный на замене градиента давления в уравнении движения модификацией, содержащей учет действия гравитационной силы. На примере решения известных задач со свободной поверхностью показано, что предложенные алгоритмы, в отличие от существующих, позволяют обеспечить предсказание корректного поля гидростатического давления, отсутствие осцилляции в поле скорости и искажения свободной поверхности при использовании неструктурированной расчетной сетки. Библ. 31. Фиг. 11.

Ключевые слова: свободная поверхность, гравитация, метод VOF, метод конечных объемов, численная схема.

DOI: 10.7868/S0044466917100088

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует несколько методов моделирования многофазных течений со свободной поверхностью, которые отличаются способом ее расчета. Первый метод основан на “лагранжевом” подходе, в котором свободная поверхность отслеживается либо путем перемещения узлов сетки, либо частицами (см. [1], [2]). Второй метод основан на “эйлеровом” подходе, в котором для отслеживания свободной поверхности вводятся специальные маркеры, в роли которых могут выступать либо частицы (см. [3]), либо пространственные маркер-функции, подчиняющиеся уравнению конвективного переноса (см. [4]–[6]). Наиболее применимым на практике является второй метод с использованием в качестве маркер-функции объемной доли жидкости (VOF – Volume-of-fluid, см. [6]). В данном методе система жидкость–газ рассматривается как единая односкоростная среда с переменными физическими свойствами. Метод легко обобщается на случай произвольных неструктурированных сеток и произвольного количества фаз (см. [7]).

¹⁾ Представленные результаты получены в рамках выполнения гос. задания в сфере научной деятельности (Задание № 5.4568.2017/6.7 и Задание № 5.5176.2017/8.9, а также при финансовой поддержке Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-6637.2016.5 и РФФИ (коды проектов 15-45-02061, 16-31-00080 и 16-01-00267).

Определяющей характеристикой для течений со свободной поверхностью является сила гравитации. Сила гравитации испытывает разрыв в области свободной поверхности вследствие резкого изменения плотности среды, что приводит к разрыву величины градиента давления, который в случае покоя среды полностью уравнивает действие гравитационных сил (см. [8]). Построение численного алгоритма, обеспечивающего корректный учет силы гравитации и расчета значений градиента давления, является нетривиальной задачей. Особенно это касается расчетных сеток с коллокированным расположением неизвестных величин, которое в основном используется на практике, однако приводит к слабой связи поля скорости и давления (см. [9]–[11]). Использование коллокированного расположения неизвестных величин подразумевает определение давления и скорости в одном и том же месте (как правило в центре ячейки), что приводит к возникновению четно-нечетных осцилляций, избавиться от которых можно путем использования метода типа Рхи–Чоу (см. [12]).

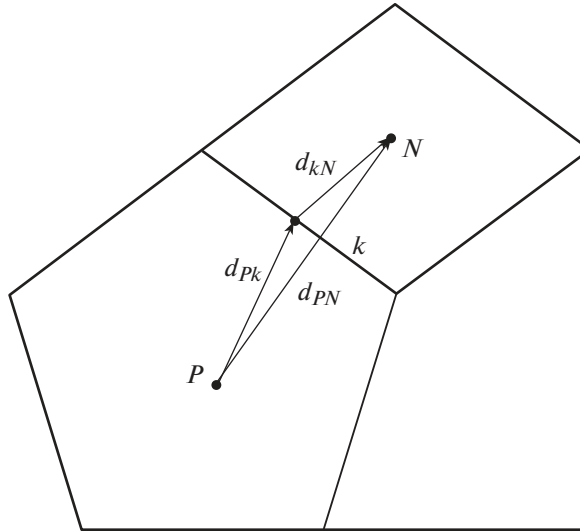
Вопросу построения численного алгоритма, обеспечивающего отсутствие численных осцилляций в случае наличия неоднородного поля силы тяжести вследствие неоднородного поля плотности, посвящен целый ряд работ (см., например, [13]–[15]). В [13] рассматривается вопрос учета объемной силы в уравнении сохранения импульса, в качестве которой может выступать и сила гравитации. С целью исключения осцилляций в поле скорости и давления предлагается использовать поправку типа Рхи–Чоу (см. [2]), что решает проблему. Однако в статье не рассматриваются задачи с сильным разрывом в поле объемной силы, в случае наличия которых возникает вопрос корректного расчета градиента давления, значение которого должно полностью уравнивать объемную силу в случае, когда среда находится в покоящемся состоянии.

Теоретическое рассмотрение проблемы учета силы гравитации представлено в [14]. Вкупе с идеями, заимствованными из [13], предлагается выражение для интерполяции объемной силы и давления на внутренние грани расчетной сетки, которое обеспечивает условие равновесия. Однако в рассмотренных задачах продемонстрировано лишь отсутствие осцилляций в поле скорости и не представлено анализа полученных форм свободной поверхности. Также не рассмотрена эффективность применения алгоритма при использовании произвольных неструктурированных сеток. К тому же в [14] используется поправка типа Рхи–Чоу для нестационарного слагаемого уравнения сохранения импульса, предложенная в [16], однако в [17] показано, что ее использование может приводить к искажению формы свободной поверхности.

В [15] представлена эффективная схема вычисления градиента давления в случае наличия сил гравитации, которая основана на интерполяции значения градиента давления с учетом плотностей среды в смежных ячейках. Данный алгоритм позволяет устранить нефизичные осцилляций в поле скорости вблизи положения свободной поверхности, однако работоспособность алгоритма продемонстрирована лишь на ортогональных расчетных сетках, линии которой параллельны направлению силы тяжести.

В настоящей статье формулируется алгоритм построения уравнения для давления, который основан на методе Рхи–Чоу. Алгоритм строится посредством замены в уравнении давления интерполяции силы гравитации ее прямым дискретным аналогом. Выражения для прямого дискретного аналога формулируются на основе гидростатического приближения, что обеспечивает корректное поле давления на произвольной неструктурированной сетке. Для обеспечения равновесия силы гравитации и градиента давления в случае покоя среды предложен алгоритм, основанный на замене градиента давления в уравнении движения его модификацией, содержащей учет действия гравитационной силы.

Эффективность предложенных решений исследуется на примере численного решения задачи о равновесии двухфазной среды в поле силы тяжести, имеющей аналитическое решение. Показано, что предложенные численные схемы, в отличие от существующих, позволяют получить корректное гидростатическое давление и обеспечить равновесие силы гравитации и градиента давления на неструктурированных расчетных сетках. Точность предсказания форм свободной поверхности с использованием предложенных численных алгоритмов оценивается путем решения задачи о колебании жидкости в поле силы гравитации и задачи об обрушении столба жидкости.



Фиг. 1. Две смежные ячейки расчетной сетки.

1. МЕТОД УЧЕТА СИЛЫ ГРАВИТАЦИИ

В методе VOF уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульса едины для всех фаз и решаются для результирующей среды, свойства которой линейным образом зависят от объемной доли каждой фазы. Общая система уравнений многофазной среды имеет вид (см. [7])

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho g_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial F_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} &= 0, \quad j = 1 \dots N-1, \quad F_N = 1 - \sum_j^{N-1} F_j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\rho = \sum_j^N F_j \rho_j$ – результирующая плотность среды, $\mu = \sum_j^N F_j \mu_j$ – результирующая вязкость среды, p – давление, u_i – вектор компонент скорости, N – количество фаз в задаче, F_j – объемная доля фазы j , g_i – вектор силы тяжести. В системе (1.1) уравнение движения записано в виде, дающем наилучшие результаты при численном решении задач со свободной поверхностью (см. [18]).

Для решения системы (1.1) используются классические алгоритмы расщепления типа SIMPLE (см. [9], [11]), PISO (см. [7], [17]), а также полностью неявный алгоритм (см. [19]–[22]), общей чертой которых является получение уравнения для давления путем подстановки дискретного аналога уравнения для скорости в уравнение неразрывности. Дискретный аналог уравнения для вычисления скорости в случае конечно-объемной дискретизации сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (см. [11])

$$a_{PP} u_{i,P} + \sum_k a_{PN} u_{i,N} = R_{i,P} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P V_P, \quad (1.2)$$

где a_{PP} – диагональный коэффициент уравнения для ячейки P , a_{PN} – коэффициент при значении скорости в соседней через грань k ячейки N , суммирование проводится по всем внутренним граням, V_P – объем ячейки P (фиг. 1).

Правая часть $R_{i,P}$ включает явную часть дискретизации конвективного, диффузионного и нестационарного слагаемых. Из уравнения (1.2) скорость выражают в виде

$$u_{i,P} = \frac{1}{a_{PP}} \left(R_{i,P} - \sum_k a_{PN} u_{i,N} \right) - \frac{V_P}{a_{PP}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P = H_{i,P} - \frac{V_P}{a_{PP}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P. \quad (1.3)$$

Скорость на грани $u_{i,k}$ вычисляется путем интерполяции выражения (1.3) из центров ячеек в центр грани k с весом λ_k , за исключением градиента давления, вклад которого заменяется его прямым дискретным аналогом (см. [7], [14]). Полученное выражение для скорости подставляется в дискретное уравнение неразрывности (1.1):

$$\sum_k u_{i,k} n_i S_k = \sum_k \left[[\lambda_k H_{i,P} + (1 - \lambda_k) H_{i,N}] n_i S_k - \left(\lambda_k \frac{V_P}{a_{PP}} + (1 - \lambda_k) \frac{V_N}{a_{NN}} \right) \frac{p_N - p_P}{d_{PN}} S_k \right] = 0, \quad (1.4)$$

где $u_{i,k}$ – скорость на грани k , n_i – нормаль грани k , S_k – площадь грани, суммирование проводится по всем граням ячейки P . Вес λ_k на практике определяется различными способами, например, исходя из геометрических расстояний от центра ячеек до центра грани (см. [10]), значений диагональных коэффициентов a_{PP} и a_{PN} (см. [12]), либо принимается равным $\lambda_k = 0.5$.

По уравнению (1.4) определяется поле давления в центрах каждой ячейки. В случае нахождения системы в состоянии равновесия поле давления должно иметь гидростатическое распределение (см. [11]). Однако по уравнению (1.4) распределение давления будет зависеть от способа интерполяции вектора H_i на грани расчетных ячеек, в который неявно входит вклад силы гравитации ρg_i , что может привести к неверному полю гидростатического давления (см. [14]).

В настоящей работе для формулировки алгоритма, позволяющего получать корректное гидростатическое давление в центрах ячеек в случае наличия разрыва в поле плотности, из правой части $R_{i,p}$ наряду с градиентом давления также выделяется вклад силы гравитации. В случае явного выделения в уравнения движения силы тяжести, уравнения (1.2)–(1.4) принимают следующий вид:

$$u_{i,p} = H_{i,p} - \frac{V_P}{a_{PP}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_p + \frac{V_P}{a_{PP}} \rho g_i, \quad (1.5)$$

$$\sum_k u_{i,k} n_i S_k = \sum_k \left[H_{i,k} n_i S_k - A_k \frac{p_N - p_P}{d_{PN}} S_k + A_k (\rho g_i)_k n_i S_k \right] = 0, \quad (1.6)$$

где $H_{i,k} = \lambda_k H_{i,P} + (1 - \lambda_k) H_{i,N}$, $A_k = \lambda_k \frac{V_P}{a_{PP}} + (1 - \lambda_k) \frac{V_N}{a_{NN}}$.

В представленной записи уравнения для расчета давления (1.6) присутствует величина силы тяжести, интерполированная на грань – $(\rho g_i)_k$. Для определения ее значения, которое позволяет получать корректное распределение давления, рассмотрим модельную одномерную задачу о покоящейся системе, состоящей из двух жидкостей с разными плотностями в поле силы гравитации (фиг. 2).

В состоянии равновесия скорости в системе равны нулю, поэтому уравнение для давления (1.6) приобретает вид

$$A_{k_1} \left(\frac{p_{N_1} - p_P}{d_{PN_1}} - (\rho g)_{k_1} \right) S_{k_1} - A_{k_2} \left(\frac{p_{N_2} - p_P}{d_{PN_2}} - (\rho g)_{k_2} \right) S_{k_2} = 0. \quad (1.7)$$

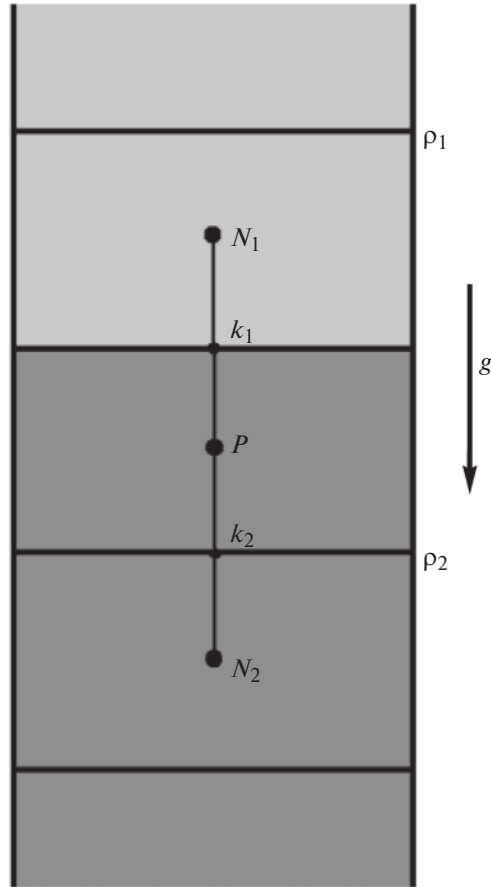
Уравнение (1.7) показывает, что член $(\rho g)_{k_1}$ напрямую определяет перепад давления между центрами ячеек P и N_1 , а член $(\rho g)_{k_2}$ – между центрами ячеек P и N_2 . Данные перепады давления вычисляются аналитически (см. [8]) в предположении постоянства плотности внутри ячеек и составляют

$$p_{N_1} - p_P = g(d_{N_1 k_1} \rho_1 + d_{k_1 P} \rho_2), \quad (1.8)$$

где $d_{N_1 k_1}$ – расстояние от центра ячейки N_1 до грани k_1 , $d_{k_1 P}$ – расстояние от грани k_1 до центра ячейки P . С учетом этого уравнение (1.7) приобретает вид

$$A_{k_1} \left(\frac{p_{N_1} - p_P}{d_{PN_1}} - g \frac{d_{N_1 k_1} \rho_1 + d_{k_1 P} \rho_2}{d_{PN_1}} \right) S_{k_1} - A_{k_2} \left(\frac{p_{N_2} - p_P}{d_{PN_2}} - g \frac{d_{N_2 k_2} \rho_1 + d_{k_2 P} \rho_2}{d_{PN_2}} \right) S_{k_2} = 0. \quad (1.9)$$

Очевидно, что решение уравнения (1.9) приведет к перепаду давления, соответствующему гидростатическому решению задачи (1.8).



Фиг. 2. Равновесие системы в поле гравитации.

В трехмерном случае гидростатический перепад давления между смежными ячейками P и N определяется выражением:

$$p_N - p_P = d_{i,Nk} g_i \rho_N + d_{i,kP} g_i \rho_P. \quad (1.10)$$

С учетом (1.10) уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\sum_k u_{i,k} n_i S_k = \sum_k \left[H_{i,k} n_i S_k - A_k \frac{p_N - p_P}{d_{PN}} S_k + A_k d_{i,Nk} g_i \rho_N \right] = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) позволяет обеспечить расчет корректного поля гидростатического давления в центрах ячеек при любом способе интерполяции вектора H_i на грани расчетной модели.

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Для обеспечения условия уравнивания силы гравитации градиентом давления в случае покоящейся свободной поверхности необходимо также обеспечивать корректный расчет градиента давления вблизи свободной поверхности. В [14] показано, что расчет градиента давления обычными методами, например методом Гаусса (см. [10]) либо методом наименьших квадратов, приводит к неправильному результату из-за существования в месте свободной поверхности излома в поле давления. Для устранения данной проблемы в [15] предлагается использовать метод Гаусса с модифицированным выражением для интерполяции значения давления на внутренние грани ячейки P :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_k p_k S_{i,k}, \quad (2.1)$$

$$p_k = \xi \left(\frac{p_P d_{kN} \rho_N + p_N d_{Pk} \rho_P}{d_{kN} \rho_N + d_{Pk} \rho_P} \right) + (1 - \xi) \left(\frac{p_P d_{kN} + p_N d_{Pk}}{d_{kN} + d_{Pk}} \right), \quad (2.2)$$

где $\xi = \cos^2 \alpha$, α – угол между нормалью грани k и направлением силы гравитации. Такой подход позволяет правильно оценить градиент давления вблизи свободной поверхности в случае использования ортогональной расчетной сетки с линиями сетки, параллельными направлению силы гравитации. Однако, как показано ниже, в случае неструктурированной сетки использование выражения (2.2) приводит к неудовлетворительному результату.

В настоящей работе предлагается использовать другой метод, который позволяет получать хорошие результаты на любом типе расчетной сетки. Основная идея метода заключается в том, что для решения уравнения движения не обязательно напрямую вычислять градиент давления, а достаточно вычислить выражение, представляющее собой одновременный вклад градиента давления и силы тяжести. Для вычисления такого выражения введем переменную p^* , представляющую собой модифицированное поле давления:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i. \quad (2.3)$$

Для вычисления правой части уравнения (1.5) с вновь введенной переменной, запишем интеграл выражения (2.3) по объему ячейки P :

$$\int_{V_P} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} dV = \int_{V_P} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV - \int_{V_P} \rho g_i dV.$$

Переход к поверхностному интегралу дает:

$$\int_{V_P} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} dV = \int_{S_P} (p - G) n_i dS, \quad (2.4)$$

где G – первообразная функции ρg_i , которую в предположении постоянства плотности внутри ячеек можно записать как

$$G = \rho g_i r_i + C, \quad (2.5)$$

где r_i – радиус-вектор, C – произвольная постоянная. Наличие постоянной C позволяет выбрать точку отсчета вектора r_i произвольным образом, для ячейки P выберем ее в центре ячейки, тогда

$$G = \rho g_i (r_i - r_{P,i}). \quad (2.6)$$

Подстановка (2.5) в (2.4) и конечно-объемная дискретизация (2.6) дает

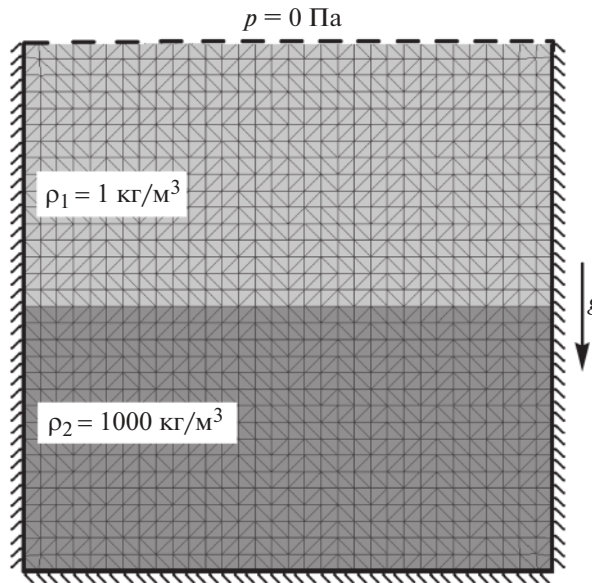
$$\int_{V_P} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} dV = \int_{S_P} (p - \rho g_i (r_i - r_{P,i})) n_i dS \approx \sum_k [p - \rho g_i (r_i - r_{P,i})]_k n_{k,i} S_k.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках последнего выражения представляет собой вклад гидростатического давления, вычисленное относительно центра ячейки P , в общее давление. В центре ячейки P оно обращается в ноль, а в центре соседней ячейки N оно вычисляется в соответствии с выражением (1.10), используемым для составления уравнения для давления. Используя для вычисления значений на грани линейную интерполяцию с весом k , получаем

$$\int_{V_P} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} dV \approx \sum_k [\lambda_k [p - \rho g_i (r_i - r_{P,i})]_P + (1 - \lambda_k) [p - \rho g_i (r_i - r_{P,i})]_N] n_{k,i} S_k = \sum_k [\lambda_k p_P + (1 - \lambda_k) (p - d_{i,Nk} g_i \rho_N - d_{i,kP} g_i \rho_P)] n_{k,i} S_k. \quad (2.7)$$

Физический смысл выражения (2.7) сводится к тому, что сила гравитации ρg_i вычитает из градиента давления лишь ту часть, которую она привнесла при формировании уравнения для давления (1.11). Это позволяет всегда обеспечивать равновесие градиента давления и силы гравитации в случае нахождения среды в состоянии покоя.

Ниже представлены результаты расчетов, демонстрирующие эффективность предложенных численных алгоритмов для вычисления давления и вычисления градиента давления в задачах со свободной поверхностью.



Фиг. 3. Условия задачи, геометрия и расчетная сетка.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Представленные ниже численные эксперименты проводились с использованием пакета программ ЛОГОС. Пакет программ ЛОГОС предназначен для решения сопряженных трехмерных задач конвективного переноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ (см. [20]–[22]). Пакет программ ЛОГОС успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических задач, включая расчеты турбулентных и нестационарных течений (см. [23]–[26]), а также промышленных задач (см. [27], [28]). Ускорение расчетов с помощью высокопараллельных вычислительных систем осуществляется многосеточными технологиями, детальное описание которых можно найти в [29], [30].

3.1. Равновесие двухфазной среды в поле силы тяжести

Равновесие двухфазной среды в поле силы тяжести – простейшая задача гидростатики, имеющая аналитическое решение (см. [8]). Однако ее моделирование методом VOF на неструктурированной сетке может приводить к проблемам, вызванным разрывом плотности на свободной поверхности. В задаче рассматривается квадратная область со стороной $L = 10$ м, наполовину заполненная водой, которая находится в состоянии покоя, остальная часть сосуда заполнена воздухом, обе фазы считаются несжимаемыми.

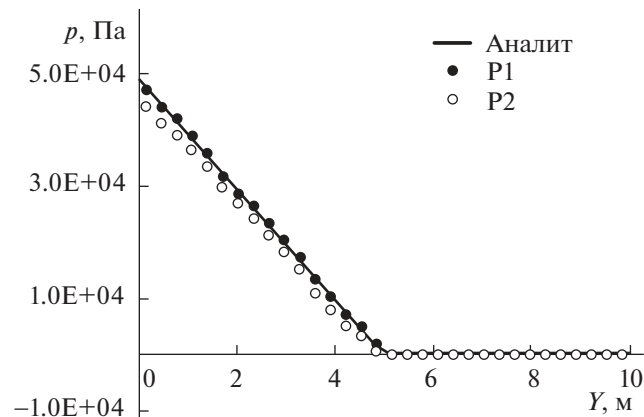
Для моделирования задачи используется расчетная сетка, составленная из треугольников (фиг. 3).

Моделирование задачи проводилось в два этапа. На первом этапе проверялась эффективность численных схем для вычисления давления, на втором – эффективность численных схем для вычисления градиента давления.

На первом этапе предполагается нулевое значение скоростей и решается уравнение для давления по предложенной схеме (1.11) (обозначим через P1) и по обычной схеме (1.4) (P2). Для схемы P2 на рассматриваемой расчетной сетке и для рассматриваемых условий задачи различные способы вычисления λ_k сводятся к одному значению, которое и использовалось в расчетах:

$$\lambda_k = \frac{d_{Nk}}{d_{Nk} + d_{Pk}} = \frac{a_{NN}}{a_{PP} + a_{NN}} = 0.5.$$

Уравнения P1 и P2 решались итеративным решателем СЛАУ с относительной точностью $\delta = 10^{-6}$. На фиг. 4 изображены графики давления вдоль центральной вертикальной линии в сравнении с аналитическим решением.



Фиг. 4. График давления для схемы P1 и P2.

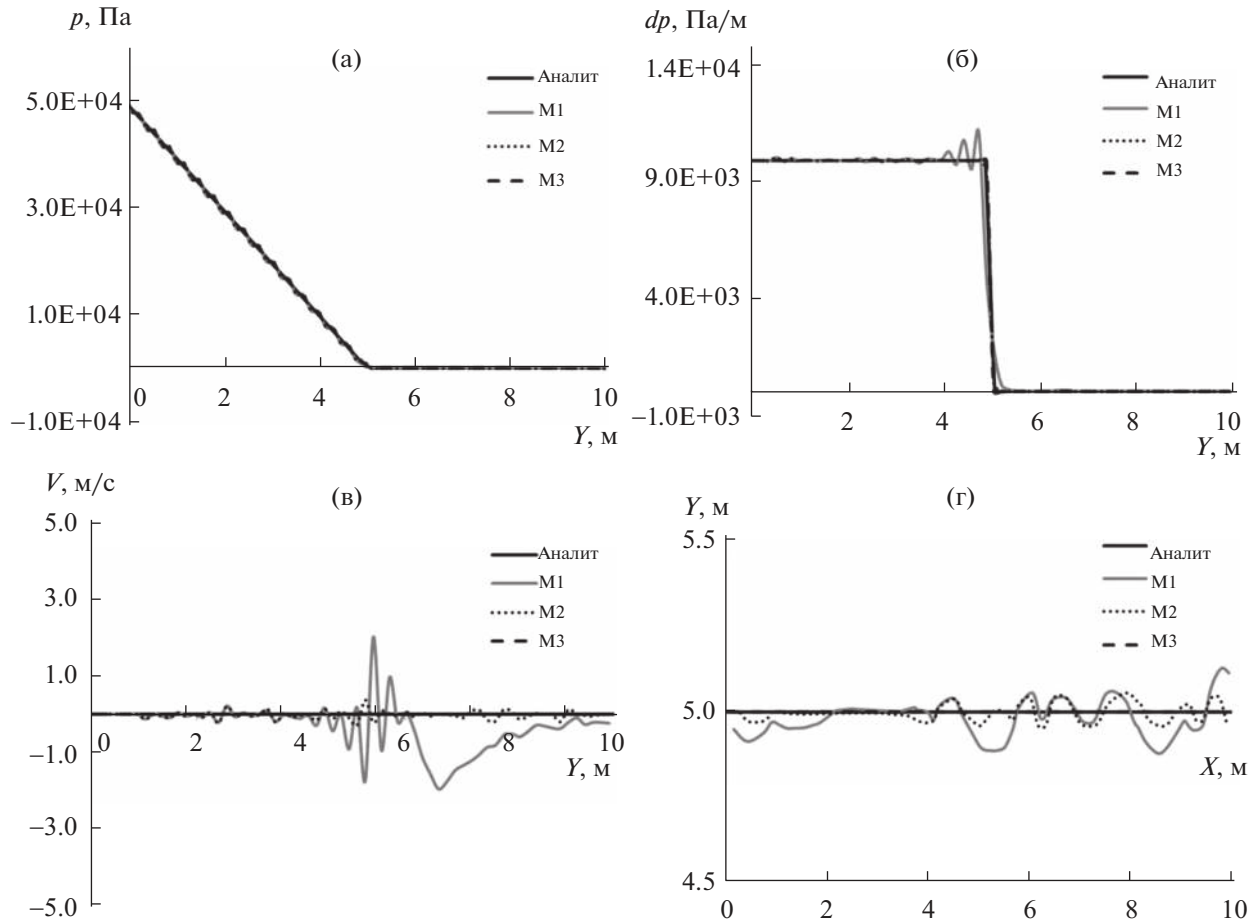
Метод P1 дает хороший результат, поле давления совпадает с аналитическим решением. Метод P2 дает график давления с правильным наклоном в области сильного изменения давления (первая часть графика), однако абсолютное значение давления имеет отклонение порядка 2 кПа. Данное отклонение начинается от точки расположения свободной поверхности $Y = 5$ м и связано с некорректным вкладом силы тяжести в уравнение для давления, в случае наличия разрыва в поле плотности среды.

Далее, на втором этапе, будем использовать только численную схему, соответствующую методу P1, и будем рассматривать эффективность методов вычисления градиента давления. Обозначим их через M1 — метод на основе формулы Гаусса (2.1) с линейной интерполяцией давления на грань, M2 — метод модифицированной интерполяции давления на грань (2.2) и M3 — метод модифицированного градиента давления (2.7). Для этого проводится расчет задачи в течение $t = 1$ с модельного времени с шагом по времени $\Delta t = 0.01$ с. С аналитическим решением сравнивается распределение давления, градиента давления и вертикальной скорости вдоль центральной вертикальной линии (фиг. 5).

Распределение давления, как и ранее для схемы P2, для каждого из методов в целом повторяет аналитическое решение. Однако для методов M1 и M2 наблюдаются некоторые различия, которые связаны с наличием ненулевых вертикальных скоростей, возникающих от несбалансированности градиента давления и силы гравитации. Данные различия более заметны на графике градиента давления. Использование метода M1 приводит к возникновению осцилляций градиента давления, что является также результатом несбалансированности градиента давления и силы гравитации. Метод M2 также имеет некоторые различия в градиенте давления в области расположения свободной поверхности, на что указывает наличие ненулевых значений вертикальной скорости (фиг. 5). Метод M3 за счет процедуры вычисления градиента модифицированного давления дает решение, совпадающее с аналитическим вплоть до точности решения СЛАУ для давления.

График вертикальной скорости показывает возникновение возмущений для метода M1 и M2. Данные возмущения в итоге приводят к возмущению формы свободной поверхности и образованию на ней “паразитных” волн (фиг. 5г). Амплитуда возмущений скорости и формы свободной поверхности для метода M2 меньше, чем для метода M1, но они все же присутствуют. Метод M3 дает максимальную вертикальную скорость порядка 10^{-7} м/с, что ничтожно мало и объясняется конечной точностью решения СЛАУ для давления. При таких значениях вертикальной скорости искажений формы свободной поверхности не наблюдается.

Таким образом, в случае гидростатического равновесия, метод M3 за счет процедуры вычисления градиента модифицированного давления (2.2) позволяет избавиться от численных осцилляций в поле давления и скорости вблизи свободной поверхности на неструктурированной расчетной сетке. Методы M1 и M2 приводят к осцилляциям в поле вертикальной скорости, что со временем приводит к искажению формы свободной поверхности и появлению на ней “паразитных” волн. Данный эффект наиболее заметен в задачах с неинтенсивным изменением формы свободной поверхности (распространение волн в стоячей воде и пр.).



Фиг. 5. Графики давления (а), градиента давления (б), вертикальной скорости (в) и свободной поверхности (г).

Далее оценим точность форм свободной поверхности при использовании метода М3 совместно с алгоритмом учета силы гравитации в уравнении для давления Р1 на примере задачи колебания жидкости в поле силы гравитации и задачи об обрушении столба жидкости.

3.2. Колебание жидкости в поле силы гравитации

В задаче рассматривается колебание изначально возмущенного состояния свободной поверхности невязкой жидкости в поле силы гравитации. Начальное возмущение задается в виде полупериода синусоидальной волны

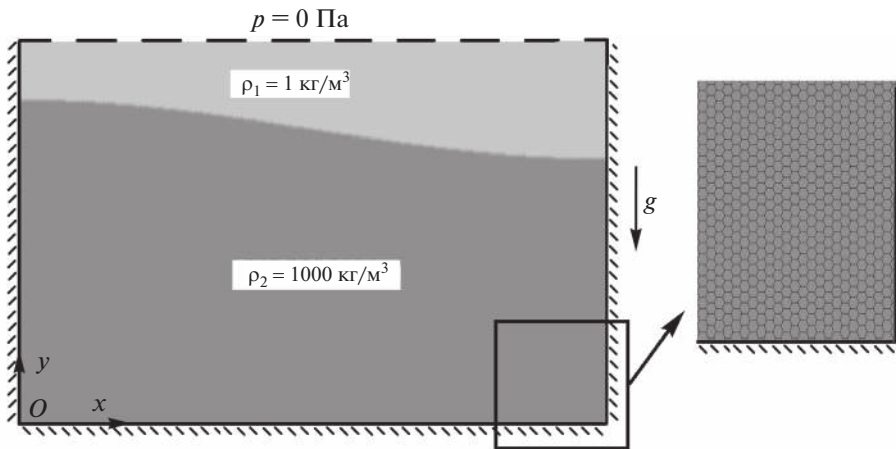
$$y(x) = 0.05 + 0.005 \sin(x\pi/L + \pi/2) \text{ [м]}, \quad (3.1)$$

где $L = 0.1$ м – длина емкости. Данная задача имеет аналитическое решение для периода колебания жидкости (см. [31]):

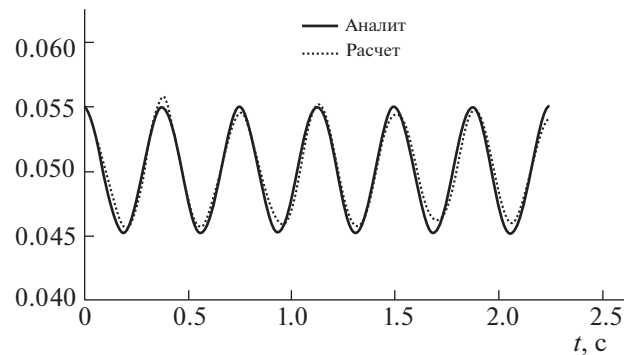
$$T = 2\pi \sqrt{gk \tanh(kh)}, \quad k = 2\pi/L.$$

Для данной конфигурации период составляет $T = 0.374$ с. Также в моменты времени, кратные периоду T , форма свободной поверхности должна повторять начальное возмущение (3.1). Моделирование задачи проводилось по схеме Р1 с использованием метода вычисления градиента давления М3. Расчетная сетка была неструктурированной и составленной из полиэдров, общее количество ячеек – 30000 (фиг. 6).

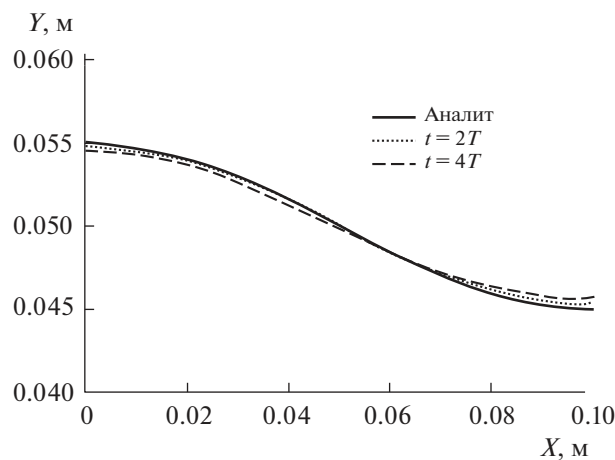
Расчет проводился в течение времени $t = 10T$ с шагом по времени $\Delta t = 0.001$ с. С аналитическим решением сравнивается положение свободной поверхности вблизи левого края сосуда (фиг. 7) и форма свободной поверхности на различные моменты времени (фиг. 8).



Фиг. 6. Условия задачи, геометрия и расчетная сетка.

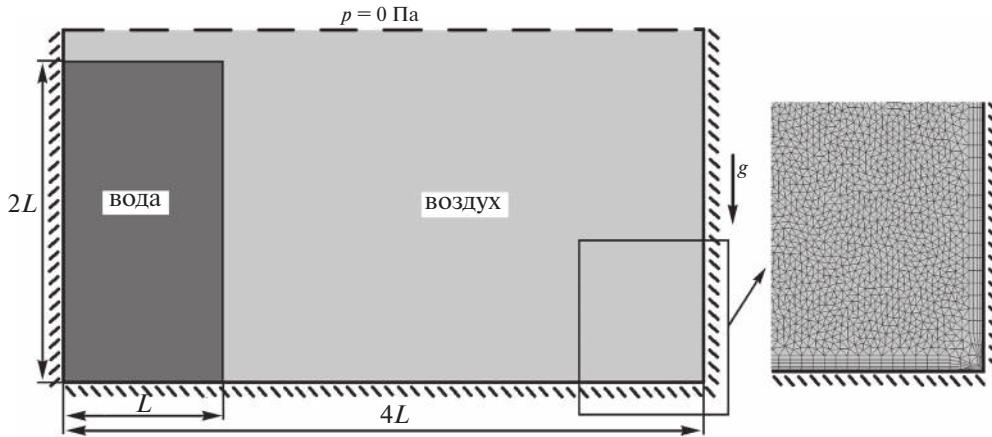


Фиг. 7. График положения свободной поверхности вблизи левого края сосуда.

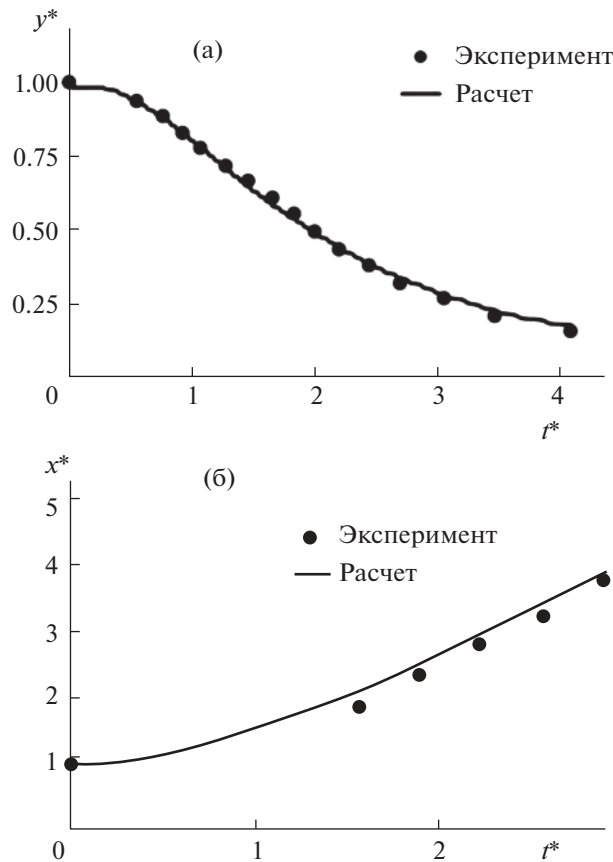


Фиг. 8. Форма свободной поверхности в различные моменты времени.

График положения свободной поверхности вблизи левого края сосуда показывает хорошее совпадение с аналитическим решением, однако наблюдается чередование значений максимумов, что связано с присутствием в колебании жидкости гармоник с периодом $2T$. Такой же результат наблюдается и в расчетах на структурированной расчетной сетке, выполненными другими авторами (см. [7]). Вероятнее всего, это связано с использованием для решения уравнения



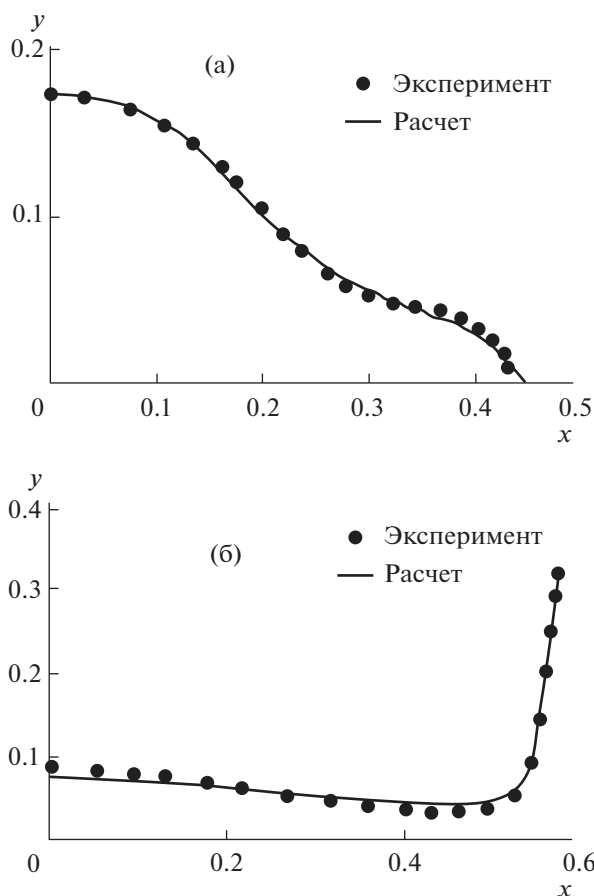
Фиг. 9. Начальные условия задачи, геометрия и расчетная сетка.



Фиг. 10. График изменения высоты столба жидкости (а) и длины дна, покрытого жидкостью (б).

переноса объемной доли системы (1.1) численной схемы M-CICSAM (см. [7]), сжимающей фронт раздела фаз и тем самым привносящей в форму свободной поверхности дополнительные гармоники.

Форма свободной поверхности на различные моменты времени по форме хорошо согласуется с аналитическим решением. По амплитуде для момента времени $t = 2T$ максимальное относительное отклонение составляет 3%, для $t = 4T - 5\%$, что сравнимо по точности с результатами, полученными на структурированной расчетной сетке (см. [7], [17]).



Фиг. 11. График формы свободной поверхности при $t = 0.2$ с (а) и $t = 0.4$ с (б).

3.3. Обрушение столба жидкости

В задаче рассматривается обрушение столба предварительно покоящейся жидкости в прямоугольном сосуде. Задача имеет экспериментальные данные по форме свободной поверхности в различные моменты времени, по изменению высоты столба жидкости вблизи левого края сосуда и длины участка дна, покрытой жидкостью, от времени (см. [7]). Геометрия задачи и положение жидкости в начальный момент времени показано на фиг. 9. Ширина столба жидкости соответствовала эксперименту: $L = 0.146$ м.

Для расчета задачи была построена треугольная расчетная сетка с призматическими пограничными слоями вблизи твердой поверхности. Количество элементов расчетной сетки – 37000 (фиг. 9). Расчет проводился в течение $t = 1$ с модельного времени с шагом по времени $\Delta t = 0.001$ с. Использовался предложенный алгоритм учета силы тяжести в уравнении для давления P1 совместно с алгоритмом расчета градиента давления M3. На фиг. 10 показаны графики изменения высоты столба жидкости и длины дна, занятого жидкостью в безразмерных параметрах, в сравнении с экспериментальными данными.

Здесь $y^* = y/2L$, $x^* = x/L$, $t^* = t(2g/L)^{1/2}$, где y – высота столба жидкости, x – длина дна сосуда, покрытого жидкостью. Изменение высоты столба жидкости, полученное в расчете с использованием разработанных алгоритмов, с хорошей точностью повторяют данные эксперимента. В свою очередь, расчетная скорость распространения жидкости по дну сосуда (фиг. 10б) несколько превышает экспериментальную скорость распространения. На фиг. 11 показана форма свободной поверхности на два момента времени в сравнении с экспериментальной формой свободной поверхности, которая была восстановлена по фотографиям эксперимента, представленным в [7].

Расчетная форма свободной поверхности хорошо повторяет форму, полученную в эксперименте. На момент времени $t = 0.2$ с так же, как и на графике распространения жидкости по дну сосуда, отмечается более быстрое распространение фронта движения жидкости вблизи дна сосуда. Такое распространение приводит к некоторому занижению уровня жидкости вблизи левого края сосуда в момент времени $t = 0.4$ с. Данный эффект связан, вероятнее всего, с диффузией объемной доли жидкости вблизи фронта ее распространения у дна сосуда. Он отмечается в расчетах и на структурированной сетке (см. [17]), следовательно, не связан с использованием предложенных алгоритмов. В целом, максимальное отклонение по форме свободной поверхности от эксперимента не превышает 6%, а среднее отклонение составляет порядка 3%.

Таким образом, рассмотрев данные задачи, можно сделать вывод о том, что предложенные алгоритмы позволяют корректно описывать эволюцию формы свободной поверхности под действием силы тяжести.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена проблема построения численного алгоритма, обеспечивающего корректный учет силы гравитации и расчета значений градиента давления в случае наличия разрывов в плотности среды, который всегда присутствует в задачах со свободной поверхностью. Для получения корректного поля гидростатического давления предложено использовать алгоритм выделения вклада силы гравитации при составлении уравнения для давления и его вычисления с использованием решения задачи о гравитационном равновесии двухфазной среды. Для обеспечения корректного расчета градиента давления в случае наличия разрывов в поле силы гравитации предложено использовать алгоритм, который позволяет получать хорошие результаты на любом типе расчетной сетки. Основная идея алгоритма заключается в том, чтобы напрямую вычислять вклад в уравнение движения градиента давления и силы гравитации.

Эффективность предложенных алгоритмов проверяется на задаче равновесия двухфазной среды в поле силы тяжести, где показано, что описанный алгоритм построения уравнения для давления дает корректное поле давления, а алгоритм вычисления градиента обеспечивает отсутствие численных осцилляций в поле вертикальной скорости и, следовательно, отсутствие искажений в форме свободной поверхности. Точность форм свободной поверхности при использовании предложенных алгоритмов продемонстрирована на примере задачи колебания жидкости в поле силы гравитации и задачи об обрушении столба жидкости, на которых показано, что использование предложенных алгоритмов позволяет получать корректную форму свободной поверхности при ее эволюции под действием силы гравитации.

Предложенные алгоритмы применимы для численных схем, основанных на использовании неструктурированных расчетных сеток с коллоцированным размещением неизвестных величин и алгоритмов расщепления, основанных на методах SIMPLE, PISO, а также им подобных. Данные алгоритмы легко можно обобщить на случай рассмотрения вместо силы гравитации любой другой неоднородной объемной силы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батлер Т.М. Развитие метода LINC. Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 146–155.
2. Бураго Н.Г. Численное решение задач МСС с подвижными границами раздела. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: ИПМ РАН, 2003.
3. Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // Astron. J. 1977. V. 82. № 12. P. 1013–1024.
4. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 2182–2189.
5. Daly B.J. A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations // J. Comput. Phys. 1969. V. 4. P. 97–117.
6. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39. P. 201–226.

7. *Ubbink O.* Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces. PhD thesis. London: Imperial College, University of London, 1997.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
9. *Ferziger J.H., Peric M.* Computational method for fluid dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 2002.
10. *Jasak H.* Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD thesis. London: Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996.
11. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей в двух томах. М.: Мир, 1991.
12. *Rhie C.M., Chow W.L.* Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // AIAA Journal. 1983. V. 21. P. 1525–1532.
13. *Gu C.Y., Taylor C., Chin J.H.* Computation of flows with large body forces / In.: Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow. Swansea: Pineridge Press, 1991. P. 294–305.
14. *Mencinger J.* An alternative finite volume discretization of body force field on collocated grid // Finite Volume Method – Powerful Means of Engineering Design, 2012. P. 101–116.
15. *Храбрый А.И.* Численное моделирование нестационарных турбулентных течений жидкости со свободной поверхностью. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. СПб.: СПбГУ, 2015.
16. *Majumdar S.* Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with nonstaggered grids // Numer. Heat Transfer. 1988. V. 13. P. 125–132.
17. *Яцевич С.В., Курулин В.В., Рубцова Д.П.* О применении алгоритма PISO в задачах динамики молекулярно-несмешивающихся жидкостей // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 1. С. 16–29.
18. *Khrabry A.I., Smirnov E.M., Zaytsev D.K.* Solving the convective transport equation with several high-resolution finite volume schemes. Test computations // Computational Fluid Dynamics 2010. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. P. 535–540.
19. *Куркин А.А., Козелков А.С., Мелешикина Д.П.* Полностью неявный метод решения уравнений Навье–Стокса для расчета многофазных течений со свободной поверхностью // Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. 2015. С. 1851–1852.
20. *Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Моделирование падения тела в воду в различных условиях на основе численного решения уравнений Навье–Стокса полностью неявным методом // Тр. Нижегородского гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. 2015. № 3. С. 51–60.
21. *Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Курулин В.В.* Моделирование цунами космогенного происхождения в рамках уравнений Навье–Стокса с источниками различных типов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 142–150.
22. *Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Влияние угла входа тела в воду на высоты генерируемых волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 166–176.
23. *Козелков А.С., Курулин В.В., Тятюшкина Е.С., Куркин А.А., Легчанов М.А., Циберева Ю.А.* Исследование применения RANS моделей турбулентности для расчета неизотермических течений с низкими числами Прандтля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 44–58.
24. *Kozelkov A., Kuralin V., Emelyanov V., Tyatyushkina E., Volkov K.* Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes // Journal of Scientific Computing. 2015. № 89. P. 1–16.
25. *Козелков А.С., Курулин В.В.* Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1255–1265.
26. *Козелков А.С., Куркин А.А., Крутякова О.Л., Курулин В.В., Тятюшкина Е.С.* Зонный RANS-LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 5. С. 24–33.
27. *Погосян М.А., Савельевских Е.П., Шагалиев Р.М., Стрелец Д.Ю., Рябов А.А., Корнев А.В., Дерюгин Ю.Н., Спиридонов В.Ф., Циберев К.В.* Применение отечественных суперкомпьютерных технологий для создания перспективных образцов авиационной техники // Ж. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 2. С. 3–17.
28. *Погосян М.А., Савельевских Е.П., Стрелец Д.Ю., Корнев А.В.* Отечественные суперкомпьютерные технологии в авиационной промышленности // Наука и технологии в промышленности. 2012. № 2. С. 26–35.

29. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Лашкин С.В., Силаев Д.П., Симонов П.Г. Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44–56.
30. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.
31. Raad P.E., Chen S., Johnson D.B. The introduction of micro cells to treat pressure in free surface fluid flow problems // Journal of Fluids Engineering. 1995. V. 117. P. 683–690.

Сдано в набор 09.06.2017 г.	Подписано к печати 23.08.2017 г.	Дата выхода в свет 28.10.2017 г.	Формат $60 \times 88^{1/8}$
Цифровая печать	Усл. печ. л. 23.0	Усл. кр.-отг. 2.5 тыс.	Уч.-изд. л. 23.0
	Тираж 108 экз.	Зак. 1515	Бум. л. 11.5
		Цена свободная	

Учредители: Российская академия наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Издатель: Российская академия наук. Издательство “Наука”, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен МАИК “Наука/Интерпериодика”
Отпечатано в типографии “Наука”, 121099, Москва, Шубинский пер., 6